Kwantowy oscylator harmoniczny

Miron Nowak

Grupa Liego

Pojęcie ogólne

Grupa Liego G jest rózniczkowalną rozmaitością wyposażoną w strukturę grupy dzięki odwzorowaniu:

$$\mu : GxG \to G; (g, h) \mapsto gh;$$

oraz przekształceniu odwrotnemu:

$$I : G \to G; g \mapsto g^{-1};$$

będącymi funkcjami klasy C^{∞}. Jeśli odwzorowanie μ jest przemienne – grupę nazywa się abelową.

Przykład

Niech **V** będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$. Operacją grupową jest dodawanie wektorów, natomiast elementem odwrotnym do **x** niech bedzie wektor -**x**. Zarówno $\mu(x, y) = x + y$ jak i $I(x) = -x$ są klasy C^∞. Wówczas (V, $+$) jest abelową grupą Liego (izomorficzną z $\mathbb{R}^{\mathsf{n}}$, gdzie n $=$ dim(**V**)).

Algebra Liego

Algebra Liego L(**V**) nad ciałem **K** (o charakterystyce $6 \neq 2$) nazywamy strukturę algebraiczną (**V**, [-,-]) złożoną z przestrzeni wektorowej **V** nad **K** oraz dwuliniowego odwzorowania [-,-]: $\mathbf{V} x \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ zwanego nawiasem Liego (komutatorem) o własnościach:

- $\forall \mathbf{X} \in \mathbf{V} : [\mathbf{X}, \mathbf{X}] = 0$,
- $\forall$**X,Y** $\in \mathbf{V} : [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + [\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = 0$, (Antysymetria)
- $\forall$**X,Y,Z** $\in \mathbf{V} : [\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] = 0$, (Tożsamość Jacobiego)

Dzięki dwuliniowości: $\forall \varepsilon, \gamma \in \mathbf{K}$ i **X,Y,Z** $\in \mathbf{V} : [\varepsilon \mathbf{X}, \gamma \mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = \varepsilon[\mathbf{X}, \mathbf{Z}] + \gamma[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], [\mathbf{X}, \varepsilon \mathbf{Y} + \gamma \mathbf{Z}] = \varepsilon[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + \gamma[\mathbf{X}, \mathbf{Z}]$ pierwsze dwa warunki są równoważne.

Bazy wolnej algebry Liego

Algebra Liego jest rozpięta przez zbiór generatorów i wszystkich możliwych komutatorów tych elementów. Podzbiór elementów niezależnych tworzy bazę algebry Liego. Sformułowanie wolna oznacza, że żąda się niezależności pomiędzy generatorami oraz ich potomkami (wygenerowanymi nawiasem Liego), które nazywamy jednomianami Liego. Zachowane są jedynie aksjomaty antysymetrii i tożsamości Jacobiego (poprzedni slajd). Dla jednomianów Liego wprowadzamy pojęcie stopnia i warstwy. Stopień jednomianu Liego jest zdefiniowany rekurencyjnie:

$$\begin{cases} deg(\mathbf{A}) & \text{jeśli } \mathbf{A} \text{ jest generatorem} \\ deg([\mathbf{A},\mathbf{B}]) = deg(\mathbf{A}) + deg(\mathbf{B}) & \text{dla złożonych jednomianów Liego} \end{cases}$$

Baza Ph. Halla

W poszukiwaniu bazy wolnej algebry Liego, własność skośnej symetrii i tożsamość Jacobiego powinny być automatycznie wykorzystane do eliminacji zależności między kolejnymi wygenerowanymi jednomianami Liego. Te cechę zapewnia algorytm generacji bazy Ph. Halla, $\mathbb{H}$, który polega na wyborze jednomianów Liego zgodnie z następującymi regułami:

- $B_i \in \mathbb{H}, i = 1, \cdots, m$
- Jeżeli $deg(B_i) < deg(B_j)$ wtedy $B_i < B_j$ w bazie $\mathbb{H}$
- $[B_i, B_j] \in \mathbb{H}$ wtedy i tylko wtedy gdy:
  a) $B_i, B_j \in \mathbb{H}$ i $B_i < B_j$ w bazie $\mathbb{H}$,
  b) albo $B_j = B_k$ dla pewnego $k = 1, \cdots, m$,
  albo $B_j = [B_l, B_r]$ dla pewnych $B_l, B_r \in \mathbb{H}$ i $B_i < [B_i, B_j]$ w bazie $\mathbb{H}$

Przykład

Baza Halla o trzech generatorach **A**,**B**,**C** do warstwy trzeciej włącznie jest następująca:

W_1 : $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$

W_2 : $[\mathbf{A}, \mathbf{B}], [\mathbf{A}, \mathbf{C}], [\mathbf{B}, \mathbf{C}]$

W_3 :[**A**[**A**,**B**]],[**A**[**A**,**C**]],
[**B**[**A**,**B**]],[**B**[**A**,**C**]],[**B**[**B**,**C**]],[**C**[**A**,**B**]],[**C**[**A**,**C**]],[**C**[**B**,**C**]]

Kombinatoryczne bazy algebry Liego

Pierwsza z prezentowanych baz – Ph. Halla, konstruuje kolejne elementy bazy z elementów bazowych już powstałych, stosując ewentualnie pewne kryterium eliminacji. Inne konstrukcje baz wolnej algebry Liego należące do Lyndona czy Shirshova, wywodzą się z kombinatoryki.

W metodach generacji tych baz najpierw definiuje się pewien alfabet (jego moc jest równa liczbie generatorów bazy), stosuje algorytm tworzenia słów nad tym alfabetem, a pózniej stosuje przepis zamiany wybranych słów na nawiasy Liego.

Kombinatoryczne bazy algebry Liego

Do opisu kombinatorycznych baz będa wykorzystane następujące definicje:

- Zbiór wszystkich uporządkowanych liter nazywamy alfabetem i oznaczamy jako $\mathbb{H}$.
- Słowo jest sekwencją liter $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, zwykle zapisywanych jako $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ i może być zastąpione pojedynczym symbolem $u = \alpha_1 \cdots \alpha_n$
- Długosc słowa u, oznaczana jako $|u|$, jest równa liczbie liter w słowie.
- $\mathbb{A}^p$ oznacza zbiór wszystkich słów nad alfabetem $\mathbb{A}$.
- Struktura złożona ze zbioru $\mathbb{A}^p$ oraz operacji konkatenacji może być traktowana jako półgrupa.

Baza Lyndona

Niech dany będzie uporządkowany alfabet $\mathbb{A}$. Odwrotny porządek leksykograficzny na zbiorze $\mathbb{A}^p$ zdefiniowany jest następujaco:
$u < v$ to równoważne co:

$$\begin{cases} \text{albo (i) } v = fu & \text{dla pewnego } f \in \mathbb{A}^p \\ \text{albo (ii) } u = fxw, \ v = gyw, & x < y \ x, y \in \mathbb{A} \ f, g \in \mathbb{A}^p \end{cases}$$

Słowo $w \in \mathbb{A}^p$ jest odwrotnym słowem Lyndona wtedy i tylko wtedy, gdy jest mniejsze od wszystkich swych lewych składników.

Baza Lyndona

Niech $\mathbb{L}$ oznacza zbiór słów Lyndona, wtedy słowo $b \in \mathbb{L}$, gdy spełnia:

$$\begin{cases} \text{albo } b \in \mathbb{A} & \text{czyli b jest literą} \\ \text{albo } b = ml & l < m \;\; m, l \in \mathbb{L} \end{cases}$$

Dla najdłuższego słowa m spełniającego powyższą własność para $(m, l) = sf(b)$ to standardowa faktoryzacja b. Kazdemu odwrotnemu słowu $b \in \mathbb{L}$ przypisuje się odpowiadający mu jednomian Liego A_b:

$$\begin{cases} A_b = b & \text{jeśli } b \in \mathbb{A} \\ A_b = [A_m, A_l] & l < m \text{ jeśli } sf(b) = (m, l) \end{cases}$$

Rodzina $\{A_b \mid b \in \mathbb{L}\}$ jest bazą (odwrotną bazą Lyndona) w przestrzeni jednomianów Liego.

Baza Shirshova

Niech $\mathbb{A}$ bedzie uporządkowanym (relacją $\leqslant$) alfabetem. Rozszerzenie porządku dla wszystkich słów jest następujące:

$uxv < uyw$ i $u > uv$ dla wszystkich $u, v, w \in \mathbb{A}^p, \; x, y \in \mathbb{A}$ takich, że $x < y$

Niech teraz $\mathbb{F}$ będzie zbiorem słów $w = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ ściśle większych (zgodnie z relacją $\leqslant$) od wszystkich swych cyklicznych przesunieć, które są zdefiniowane w następującej postaci $\alpha_{i+1} \cdots \alpha_n \alpha_1 \cdots \alpha_i$, $i = 1, \cdots, n-1$. Lemat Shirshova stanowi, że każde słowo w jest niemalejacym iloczynem (konkatenacją) słów z $\mathbb{F}$

$$w = f_1 \cdots f_n \text{ z } f_1, \cdots, f_n \in \mathbb{F} \text{ i } f_1 \leqslant \cdots \leqslant f_n$$

a wtedy:

$$\pi(w) = [\pi(f_1), [\pi(f_2), [\cdots [\pi(f_n), \alpha]]]]$$

Baza Shirshova

Ważne

Jakkolwiek sposób definicji baz Shirshova i Lyndona są rózne, to elementy bazy algebry Liego powstałe z zastosowania algorytmów Shirshova i Lyndona są identyczne.

Z tego powodu wymienione bazy są czasem traktowane jako jedna i nazywane wspólnie bazą Lyndona-Shirshova. Baza Shirshova nazywana jest także czasem bazą Chena-Foxa- Lyndona.

Podsumowanie

- Pierwsza baza wolnej algebry Liego pojawiła się w pracach Ph. Halla z 1930 roku - najczęściej wykorzystywana przez robotyków,
- Następnie powstały bazy Lyndona i Shirshova,
- Wybór definicji algebry wpływa na sposób jej konstrukcji i implementacje.
- Oprócz zalet implementacyjnych, wybór innej bazy niż Halla np. bazy Lyndona może oferować dodatkowe atuty:

Zalety bazy Lyndona

- operacja na słowach wymaga mniej pamięci komputera,
- operacje na nawiasach Liego mogą być mniej kosztowne obliczeniowo,
- najwiekszy mnoznik po operacji nawiasowania jest natychmiast nawiasem Liego z zachowaniem kolejnosci wystepujacych symboli. W bazie Lyndona zatem od razu otrzymujemy największy jednomian Liego tworzący dany nawias, natomiast jego wyliczenie w bazie Halla jest kosztowne.

Dziękuję za uwagę!